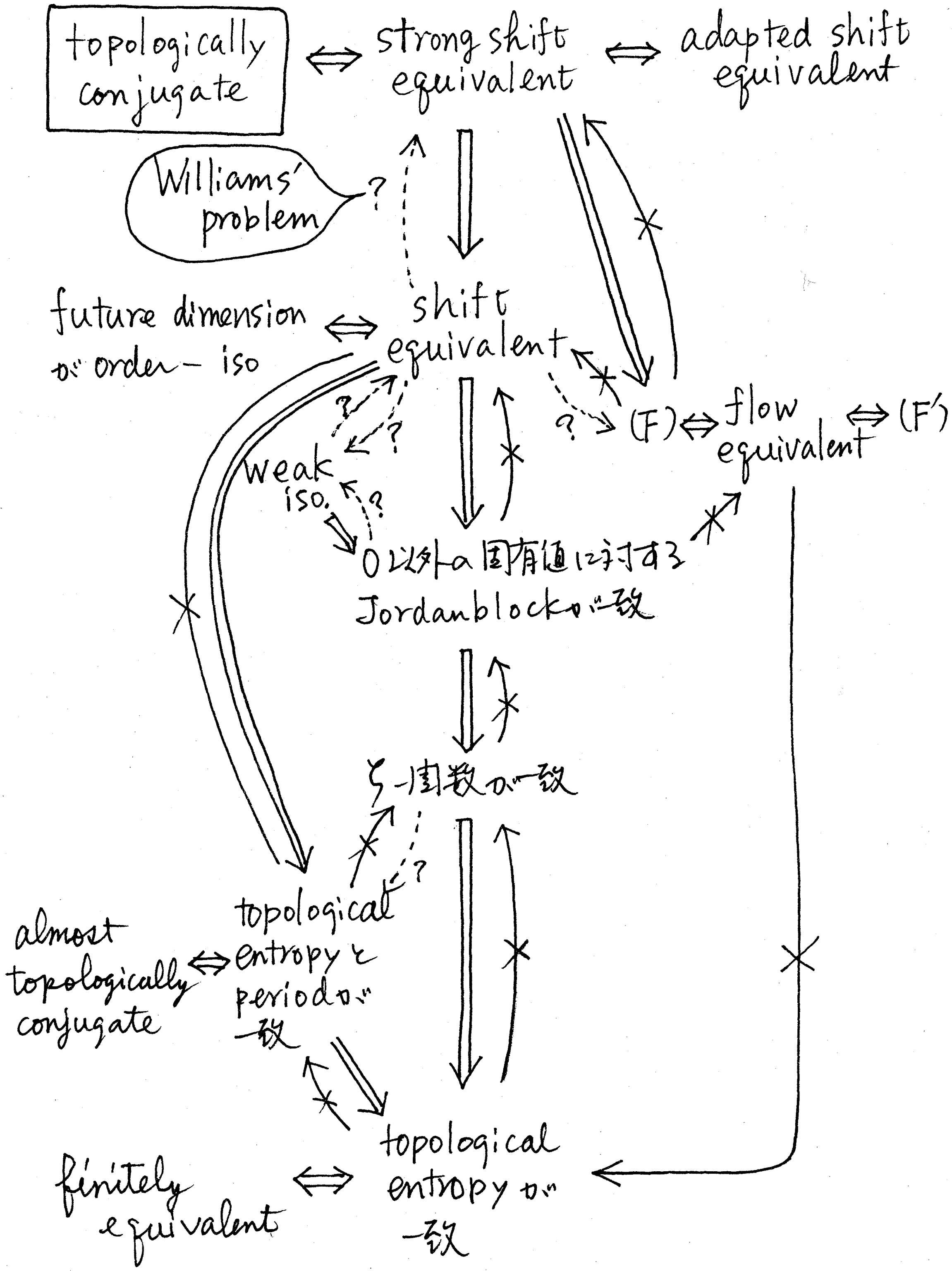
数理解析研究所講究録
552巻 1985年 49-68

Topological Markov shiftの同型問題

九大理　藤原 雅子（Masako Fujiwara）

Topological Markov shiftから生成される C^*-環はC^*-環の重要な例を与えている. ここでは 作用素環理論との関係に 制限することなく, topological Markov shiftについて, 現在までに知られている結果をまとめる.

結果を図示すると 次のようになっている.


topologically conjugate
strong shift equivalent
adapted shift equivalent
Williams' problem
?
future dimension が order-iso
shift equivalent
?
?
weak iso.
?
?
(F)
flow equivalent
(F')
0以外の固有値に対する Jordanblockが一致
ζ-関数が一致
?
almost topologically conjugate
topological entropy と periodが一致
finitely equivalent
topological entropy が一致

< topological Markov shift >

l次非負整数正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し，

$X_A^1=\{(i,a,j)\ ;\ 1\leq i,j\leq l,\ 1\leq a\leq a_{ij}\}$，

$X_A=\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\ ;\ x_n=(i_n,a_n,j_n)\in X_A^1,\ j_n=i_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{Z}\}$

と置いて，X_Aに離散位相の積位相から定まる相対位相を入れると，X_Aは compact，tottally-disconnected，metric spaceとなり，X_A上の shift $\sigma:(x_n)\longmapsto(x_{n+1})$ は homeomorphismとなる。こうしてできた dynamical system $\sigma_A=(X_A,\sigma)$ を，Aを構造行列とする，topological Markov shift と言う。

一般に，位相力学系(X,f)と(Y,g)が topologically conjugateであるとは，homeomorphism $\phi:X\to Y$ が存在して，$\phi\circ f=g\circ\phi$ が成り立つことである。topological Markov shift の topological conjugacy を，その structure matrix の言葉で代数的に表現したものが，次の strong shift equivalence という概念である。

<u>Def</u> (R. F. Williams, [16])

$\mathbb{Z}^+$上の正方行列 AとBが strong shift equivalent であるとは，

自然数 $n\geq 1$ と，$\mathbb{Z}^+$上の長方行列 U_k，V_k $(1\leq k\leq n)$

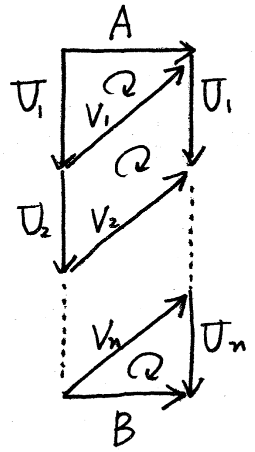
が存在して，

$A = U_1 V_1$,

$V_k U_k = U_{k+1} V_{k+1} \quad (1 \leq {}^\forall k \leq n-1)$,

$V_n U_n = B$

が成り立つことである。



この時，A と B は n-step の strong shift equivalent であると言い，$A \underset{s.s.eq}{\sim} B$ と書く。

<u>Thm</u>（R.F. Williams, [16]）

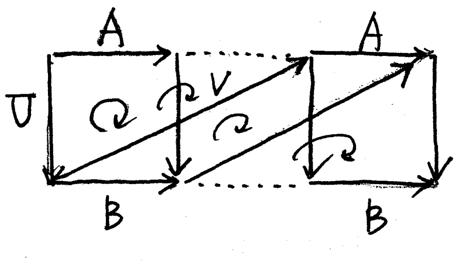
topological Markov shift が topologically conjugate である為の必要十分な条件は，各々の structure matrix が strong shift equivalent となることである。

<u>Def</u>（R.F. Williams, [16]）

$\mathbb{Z}^+$ 上の正方行列 A と B に対し，

$A^l = UV$,　$B^l = VU$,

$AU = UB$,　$BV = VA$



を満たす自然数 $l \geq 1$ と，$\mathbb{Z}^+$ 上の長方行列 U, V が存在する時，

A と B は lag l の shift equivalent であると言い，

$A \underset{s.eq}{\sim} B$ と書く。

$\mathbb{Z}^+$上の正方行列が，n-steps の strong shift equivalent であれば，明らかに lag n の shift equivalent である。逆に，"shift equivalence は topological conjugacy を導くか？" という問題を Williams' problem と言い，未だ解決されていない。

$\mathbb{Z}^+$上の l 次正方行列 A と，自然数 $n \geq 2$ に対して，X_A の n-block 全体を

$$X_A^n = \{[\alpha_1, \cdots, \alpha_n] \,;\, \alpha_k = (i_k, a_k, j_k) \in X_A^1,\ j_k = i_{k+1} \quad 1 \leq \forall k \leq n-1\}$$

と置いて，$|X_A^n| \times |X_A^n|$，0-1 行列 $A^{[n]}$ を

$$A^{[n]}([\alpha_1, \cdots, \alpha_n], [\beta_1, \cdots, \beta_n]) = \begin{cases} 1 & \beta_k = \alpha_k \quad (1 \leq \forall k \leq n-1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$\text{for } [\alpha_1, \cdots, \alpha_n], [\beta_1, \cdots, \beta_n] \in X_A^n$$

で定める。

この時，0-1 行列 $A^{[n]}$ から定まる topological Markov shift $\sigma_{A^{[n]}}$ を σ_A の n-higher block system と呼ぶ。

明らかに 対応

$$\begin{array}{ccc} \sigma_A & \longrightarrow & \sigma_{A^{[n]}} \\ \Psi & & \Psi \\ (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} & \longmapsto & ([x_k, \cdots, x_{k+n-1}])_{k \in \mathbb{Z}} \end{array}$$

により，σ_A とその higher block system $\sigma_{A^{[n]}}$ とは topologically conjugate である。

<u>Def</u> (W. Parry, [13])

Z^+ の正方行列 A と B に対し，自然数 $n \geq 2$ が lag $(n-1)$ の shift equivalent である時，A と B は adapted shift equivalent であると言う。

<u>Thm</u> (W. Parry, [13])

strong shift equivalence と adapted shift equivalence は同値である。

topological conjugacy より弱い概念として weak isomorphic というものがある。

<u>Def</u>

dynamical system (X, ϕ) と (Y, ψ) の間に，boundedly finite-to-one factor map

$$\pi_1 : X \to Y, \qquad \pi_2 : Y \to X$$

が存在する時，(X, ϕ) と (Y, ψ) は weak isomorphic であると言う。

ここに，$\pi : (X, \phi) \longrightarrow (Y, \psi)$ が factor map であるとは，π が onto, continuous, shift-commutative (i.e. $\pi \circ \phi = \psi \circ \pi$) であることである。

B. Kitchens [7] の結果より，

<u>Coro.</u>

互いに isomorphic である topological Markov shift の structure matrices は，0以外の固有値に対する Jordan block が全て一致する．

一方，shift equivalence が topological Markov shift の weak iso. を引き出すかどうかは，まだ解っていないが，互いに shift equivalent である $\mathbb{Z}^+$上の正方行列について，上と同様の結果が成立する。

topological Markov shift の中には，自分自身の逆変換と topologically conjugate でないものが存在する。例えば，$T=\begin{pmatrix}19 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ と $T^*=\begin{pmatrix}19 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ は shift equivalent ではない。従って，0以外の固有値に対する Jordan blocks は，topological conjugacy の完全不変量で有り得ない。又，これから紹介していく topological conjugacy の invariants についても，これらが complete でないことが解る．

compact dynamical system (X, ϕ) に対して

関数 $\zeta(t)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n t^n}{n}\right) \qquad t\in\mathbb{R}$

但し，$N_n=\mathrm{card}\{x\in X\ ;\ \phi^n x=x\}$

を，$(X.\phi)$ の ζ-関数と呼ぶ。

topological Markov shift σ_A については，そのstructure matrix が irreducible（後で定義する）である時，Aの最大固有値を λ_A（$\in \mathbb{R}^+$: Perron-Frobenius' thm）とすると，上式の右辺は $|t| < \frac{1}{\lambda_A}$ で収束し，

$$\zeta_A(t) = 1/\det(I - tA)$$

となる。（R. Bowen & O. E. Lanford，[4]）

これより明らかに，0以外の固有値に対するJordan blockが一致すれば，ζ-関数も一致する。

特に，$\mathbb{Z}^+$上の正方行列 A が，1×1 行列 (n) とshift equivalent である為の必要十分条件は，$\zeta_A(t) = (1-nt)^{-1}$ となることである。（R.F. Williams [16]，B. Marcus [10]）。即ち，片方が n-full shift である場合には，ζ-関数によって topologically conjugate であるかどうかを判定できる。

更に，irreducible Markov shift σ_A について，その topological entropy は $\log \lambda_A$ であるから，ζ-関数が一致すれば，topological entropy も一致する。

topological entropy を完全不変量とする topological な概念は，次の finitely equivalence である。

<u>Def</u>

topological Markov shift σ_A, σ_B に対し、
topological Markov shift σ_C と boundedly finite-to-one
factor maps, $\pi_A : X_C \to X_A$, $\pi_B : X_C \to X_B$
が存在する時、σ_A と σ_B は finitely equivalent
であると言う。

<u>Thm</u> (W. Parry, [12])

topological Markov shift が互いに finitely
equivalent になる為の必要十分な条件は、各々の topological
entropy が一致することである。

< almost topological conjugacy >

topological conjugacy の別の invariants として
ergodic period がある。

<u>Def</u> compact dynamical system (X, ϕ) について

i) ϕ-invariant, ergodic probability measure μ で、
X の空でない open set B に対し $\mu(B) > 0$
を満たすものが存在する時、(X, ϕ) は ergodically
supported であると言い、μ を ergodically supporting

measure と言う。

ii) X の部分集合 N が全ての ergodically supporting measure に関して measure が 0 である時、N を universally null set という。

Def　ergodically supported, compact dynamical system (X, ϕ) が ergodically aperiodic であるとは、任意の自然数 $n \geq 1$ に対して (X, ϕ^n) が ergodically supported となることである。

逆に (X, ϕ) が ergodic period $p > 1$ を持つとは、X の closed subset X_i $(i=0, \cdots, p-1)$ が存在して、次の i)〜iv) を満たすことである。

i) $X = \bigcup_{i=0}^{p-1} X_i$

ii) $i \neq j$ の時 $X_i \cap X_j$ は universally null set

iii) $\phi X_i = X_{i+1 \,(\mathrm{mod}\, p)}$ $\quad (0 \leq {}^\forall i \leq p-1)$

iv) $(X_i, \phi^p|X_i)$ は ergodically aperiodic $(0 \leq {}^\forall i \leq p-1)$

この時、X_i $(i=0, \cdots, p-1)$ を X の cyclic moving subset と言う。

ここで、dynamical system (X, ϕ) に対し、ergodic period は一意に定まり、cyclic moving subset X_i は universally null の部分を除いて一意に定まる。

他方，$\mathbb{Z}^+$上の正方行列の period は次のようにして定義される。

<u>Def</u>　$A=(a_{ij})$ を l 次非負整数正方行列とする。

1. A が irreducible であるとは，任意の $(i,j)\in\{1,\cdots,l\}^2$ に対し，$a^{(n)}_{ij}>0$ なる自然数 $n=n(i,j)\geq 1$ が存在することである。ここで A^n の (i,j) 成分を $a^{(n)}_{ij}$ と書く。
2. 上の n が (i,j) と無関係に定まる時，A は aperiodic であると言う。
3. irreducible matrix A に対して
$p(A)=\mathrm{g.c.d}\{n\in\mathbb{Z}^+ ;\ a^{(n)}_{ii}>0,\ 1\leq i\leq l\}$
を A の period と呼ぶ

実は A が period 1 の irreducible matrix であることと，A が aperiodic であることは同値である。

<u>Prop</u>　topological Markov shift σ_A について

1. σ_A が ergodically supported であることと，structure matrix A が irreducible であることは同値。
2. σ_A が ergodic period $p\geq 1$ を持つことと A の period が p であることは同値。

特に σ_A が ergodically aperiodic であることと A が aperiodic であることは同値。

Def (X, ϕ), (Y, ψ) を ergodically supported, compact dynamical system とする

1. boundedly finite-to-one factor map $\pi : Y \to X$ と X の ϕ-invariant universally null set N が存在して, π が $Y - \pi^{-1}N$ 上 1-1 である時, (Y, ψ) を (X, ϕ) の almost conjugate extension, map π を almost homeomorphic factor map と言う。
2. (X, ϕ) と (Y, ψ) が 共通の ergodically supported almost conjugate extension を持つ時, (X, ϕ) と (Y, ψ) は almost topologically conjugate であると言う。

Thm (R.L. Adler - B. Marcus, [2])

2つの irreducible, topological Markov shift が almost topologically conjugate となる為の必要十分条件は, それらの topological entropy と period が一致することである。

又，互いに shift equivalent である irreducible matrices から定まる topological Markov shift は almost topologically conjugate であることが直接できる。

< future dimension >

shift equivalence を完全に決定する条件を見つける為に W. Krieger によって導入されたのが、次の future dimension である。これは C^*-環とも深く関わるものである。

$\sigma_A = (X_A, \sigma)$ を topological Markov shift とする。

$X_A \ni x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $j \in \mathbb{Z}$ に対し

$$W_j(x) = \{ (y_i) \in X_A \,;\, y_i = x_i \quad \forall i \leq j \}$$

$$W(x) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} W_j(x)$$

と置いて、$W(x)$ に inductive limit topology を入れる。cylinder

$$W_j(x) \cap [z_1, \cdots, z_k]_{j+1}$$

ここで $[z_1, \cdots, z_k]_{j+1} = \{ (x_i) \in X_A \,;\, x_{j+1} = z_1, \cdots, x_{j+k} = z_k \}$

が $W(x)$ の open basis を成す。

$W(x)$ の生成する Boolean algebra を $\mathcal{B}_{W(x)}$ と書く。

今，終点が一致している2つの cylinder set

$$C_1 = W_j(x) \cap [z_1, \cdots, z_k]_{j+1} \neq \phi$$

$$C_2 = W_j(x) \cap [z_1', \cdots, z_k']_{j+1} \neq \phi$$

と，整数 $k \geqq 1$ に対し，

map $f_k(C_1, C_2) : W(x) \to W(x)$ を

$$f_k(C_1, C_2)(y) = \begin{cases} \cdots x_{j-1} x_j z_1' \cdots z_k' y_{k+j+1} \cdots & (y \in C_1) \\ \cdots x_{j-1} x_j z_1 \cdots z_k y_{k+j+1} \cdots & (y \in C_2) \\ y & \text{その他} \end{cases}$$

によって定義し，$f_k(C_1, C_2)$ の生成する群を $\mathfrak{F}_k(x)$，$\bigcup_{k \geqq 1} \mathfrak{F}_k(x) \equiv \mathfrak{F}(x)$ とする時，

$\mathcal{B}_{W(x)} / \mathfrak{F}(x)$ を dimension と言う。

更に $\mathcal{B}_{W(x)} / \mathfrak{F}(x)$ の元 α, β, γ に対して

$$A \cap B = \phi, \quad C = A \cup B$$

なる $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $C \in \gamma$ が存在する時に限り

$$\alpha + \beta = \gamma$$

と和を定義する。

こうしてできた群を K_A，その positive cone を K_A^+ で表わし，この2つの組 (K_A, K_A^+) を A の future dimension module と呼ぶ。

Lemm. A を $\mathbb{Z}^+$ 上の n 次正方行列とする.

A の future dimension module は,
direct limit $\varinjlim_{A}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n_+)$ と order-isomorphic
である.

ここで. $(K_A, K_A^+) \approx \varinjlim_{A}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n_+)$ 上 の
order-automorphism ψ_A を

$$\psi_A(\alpha, k) = (\alpha A, k) \qquad \alpha \in \mathbb{Z}^n, \ k \in \mathbb{N}$$

によって 定義し.
この (K_A, K_A^+, ψ_A) の組を A の future dimension
と言う.

Thm (W. Krieger, [8], [9])

$\mathbb{Z}^+$ 上の正方行列が shift equivalent である為の
必要十分な条件は, 各々の future dimension が
order-isomorphic であることである.

< Flow equivalence >

ここ迄の流れとは別に, Parry-Sullivan によって
導入された flow-equivalence という概念がある.

一般に，compact dynamical system (X, ϕ) と
この上の連続関数 $f: X \to \mathbb{R}^+$ に対し，

$$X \times \mathbb{R}^+ \big/ (x, f(x)) \underset{f}{\sim} (\phi x, 0)$$

上に 1-parameter flow $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ を作用させることによってできる system

$$\left(X \times \mathbb{R}^+ \big/ \sim_f , F_t \right)$$

を (X, ϕ) の f による suspension flow と呼び，(X, ϕ, f) と書く。

<u>Def</u>　compact dynamical system (X, ϕ) と (Y, ψ) が flow-equivalent であるとは，
連続関数 $f: X \to \mathbb{R}^+$，$g: Y \to \mathbb{R}^+$ が存在して，
各々の suspension flow (X, ϕ, f) と (Y, ψ, g) が topologically conjugate となることである。

A と B を $\mathbb{Z}^+$ 上の正方行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

であるか又は

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

である時．$A \underset{f}{\sim} B$ と書く。

$\mathbb{Z}^+$上の正方行列 AとBについて，

(F) $\mathbb{Z}^+$上の正方行列の列，$M_0=A, M_1, \cdots, M_n=B$ が存在して，$M_k \underset{s.s.eq}{\sim} M_{k+1}$ 又は $M_k \underset{f}{\sim} M_{k+1}$ $(0 \leq k \leq n-1)$ が成り立つ

時，AとBは条件(F)を満たすと言う。

<u>Thm</u> (W. Parry - D. Sullivan . [14])

topological Markov shift が flow-equivalent となる為の必要十分条件は 各々の structure matrices が 条件(F)を満たすことである。

J. Franks は 上の条件(F)を，より代数的に~~書き~~替えた。

$\mathbb{Z}^+$上の n次正方行列 Aと m次正方行列 Bについて，

$$(F') \begin{cases} \det(I_n - A) = \det(I_m - B) \\ \mathbb{Z}^n/(I_n-A)\mathbb{Z}^n \underset{iso.}{\cong} \mathbb{Z}^m/(I_m-B)\mathbb{Z}^m \end{cases}$$

が成り立つ時，AとBは条件(F')を満たすと言う。

<u>Thm</u> (J. Franks [6])

topological Markov shift が flow-equivalent となる為の必要十分な条件は、structure matrix が条件 (F') を満たすことである。

< references >

1. R.L. Adler, A.G. Konheim and M.H. McAndrew, Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965) 309–319.

2. R.L. Adler and B. Marcus, Topological entropy and equivalence of dynamical systems, Mem. A.M.S. 219 (1979).

3. R. Bowen, Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc., 154 (1971) 377–397.

4. R. Bowen and O.E. Lanford, Zeta functions of restrictions of the shift transformations, Proc. Symp. Pure Math., A.M.S. 14 (1970), 43–50.

5. J. Cuntz and W. Krieger, A class of C^*-algebras and topological Markov chains, Invent. Math.,

56 (1980), 251-268.

6. J. Franks, Flow equivalence of subshifts of finite type, preprint.

7. B. Kitchens, An invariant for continuous factors of Markov shifts, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981) 825-828.

8. W. Krieger, On a dimension for a class of homeomorphism groups', Math. Ann, 252 (1980), 87-95.

9. W. Krieger, On dimension function and topological Markov chains, Invent. Math., 56 (1980), 239-250.

10. B. Marcus, Factors and extensions of full shifts, Monats. Math., 88 (1979), 239-247.

11. W. Parry, Intrinsic Markov chains, Trans. A.M.S., 112 (1964), 55-66.

12. W. Parry, A finitary classification of topological Markov chains and sofic systems, Bull. L.M.S., 9 (1977), 86-92.

13. W. Parry, The classification of topological Markov chains. Adapted shift equivalence,

Israel J. Math., 38 (1981), 335-344.

14. W. Parry and D. Sullivan, A topological invariant for flows on one-dimensional spaces, Topology 14 (1975), 297-299.

15. W. Parry and S. Tuncel, Classification problems in ergodic theory, London Mathematical Society Lecture Note Series 67 (Cambridge University Press, 1982)

16. R.F. Williams, Classification of subshifts of finite type, Ann. of Math. 98 (1973), 120-153; Errata, Ann. of Math., 99 (1974), 380-381.